

تحقیق در رابطه برنولی^۱

تهیه و تنظیم: سیما مهراجی

هدف آزمایش

تحقیق در درستی رابطه برنولی برای جریان آب در یک مجرای با سطح مقطع متغیر (یک ونتوری افقی) به وسیله اندازه گیری سرعت و فشار در مقاطع مختلف آن و مقایسه آن با حالت تئوری.

مقدمه

لوله ی ونتوری در ایجاد مکش یا کاهش فشار کاربرد دارد، به اینگونه که با عبور جریان از داخل لوله ، طبق قانون پیوستگی به علت کاهش مساحت در قسمت گلوگاه سرعت جریان در این قسمت ، منجر به کاهش فشار میشود و این کاهش فشار به نوبه ی خود موجب ایجاد مکش در محل اتصال لوله ی فلزی خواهد شد.

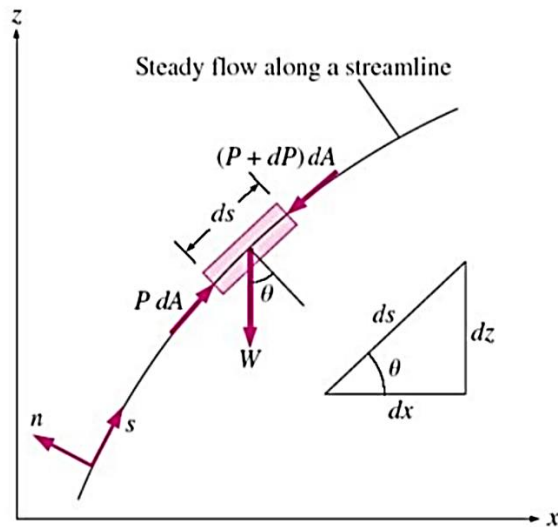
فشار استاتیک فشاریست که از سوی توده ی هوای ساکن اعمال میشود (یا هر سیال دیگری به غیر از هوا) ، حال اگر سیال ، داخل مخزن در جریان باشد ، باز مقداری فشار استاتیک بر دیوارها اعمال میگردد اما در این صورت سیال دارای یک فشار دینامیکی نیز خواهد بود . برای درک فشار دینامیکی دست خود را جلوی جریان آب ، سد کنید ، نیرویی که به دست شما وارد میشود در اثر همین فشار دینامیکی است. نکته ی حائز اهمیت در معادله ی برنولی، که فشار استاتیک و دینامیک را به هم ربط میدهد این است که میزان فشار اعمال شده از هر سیال مقدار ثابتی است. بنابراین هر چه سرعت سیال افزایش یابد بر مقدار فشار دینامیکی افزوده شده و به همان میزان از فشار استاتیکی کاسته میشود (این پیامد را در فرمول بررسی کنید).

از کاربردهای معادله برنولی در سوختگیری باک ماشین است. برای اینکه جریان بنزین از گالن به باک را هدایت کنند، باید فشار را در گالن افزایش یابد تا شارش از فشار زیاد به فشار کم جریان یابد. این به معنای بلندتر گرفتن ارتفاع گالن نسبت به ارتفاع باک می باشد. از کاربردهای دیگر آن ازدیاد سرعت آب در شلنگ آب است وقتی انگشتان جلوی شلنگ قرار می گیرد [۱].

تئوری آزمایش

اگر یک المان از سیال به طور ds بر روی یک خط جریان ، محدود به صفحه عمود بر خط جریان در نظر گرفته شود ، معادلات پیوستگی و ممثوم مطابق زیر است. مختصات X و y کارتزین و مختصات s و n قائم و مماس می باشند. (شکل ۱)

¹ Bernoulli's Theorem Demonstration



شکل ۱: یک المان از سیال در خط جریان و نیروهای وارد بر آن.

معادله برنولی بر مبنای فرض‌های زیر است :

۱. معادله فقط برای سیال ایده‌آل استوار است.
۲. مشتقات جزئی نسبت به زمان صفر یا به عبارتی جریان دائمی (*Steady*) فرض می‌شود.
۳. معادله بر روی یک خط جریان به دست می‌آید.

$$\Sigma F_s = Ma_s$$

$$p dA - \left(p + \frac{\partial p}{\partial s} ds \right) dA - W \sin \alpha = p ds dA a_s$$

$$w = ds dA$$

$$-\frac{\partial p}{\partial s} - \gamma \sin \alpha = p a_s \quad \text{معادله (۱)}$$

زمانی که ds به سمت صفر میل می‌کند ، $\sin \alpha$ با مقدار عددی $\frac{\partial Z}{\partial s}$ برابر خواهد شد.

بنابراین :

$$-\frac{\partial P}{\partial s} - \gamma \frac{\partial Z}{\partial s} = p a_s \quad \text{معادله (۲)}$$

اگر شتاب صفر شود خواهیم داشت :

$$\frac{d}{ds} (p + \gamma z) = 0 \quad \text{معادله (۳)}$$

برای سیالات غیرقابل تراکم با جرم مخصوص ثابت و در حرکت یک بعدی، می‌توان با انتگرال‌گیری از معادله اولر بین دو نقطه غیر مشخص رابطه زیر را به دست آورد.

$$\frac{P_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} + Z_1 = \frac{P_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g} + Z_2 \quad \text{معادله (۴)}$$

چون نقاط ۱ و ۲ دو نقطه اختیاری در طول خط جریان می‌باشند، می‌توان به طور کلی نوشت:

$$\frac{P}{\gamma} + \frac{V^2}{2g} + Z = cte \quad \text{(مقدار ثابت)} \quad \text{معادله (۵)}$$

در این فرمول p فشار، V سرعت سیال، Z ارتفاع خط جریان از مبدا، g شتاب ثقل، ρ دانسیته سیال و $\gamma = \rho \times g$ می‌باشد. رابطه اخیر برای تمام نقاط بر روی یک خط جریان، قابل استفاده است. معادله (۴-۵) برای سیال‌های ایده‌آل (بدون لزجت) و جریان یک بعدی غیرچرخشی و نیز غیرقابل تراکم به دست آمده و معادله اصلی کار و انرژی است. رابطه فوق را بین مقادیر فشار، سرعت و ارتفاع هر نقطه در مایع، می‌توان به شرح زیر بیان نمود:

در هر نقطه غیر مشخص از هر رشته جریان در یک سیال کامل و غیرقابل تراکم با جریان دائمی که فاقد تبادل حرارت و انرژی مکانیکی با خارج باشد، جمع مقادیر ارتفاع نمایش دهنده فشار (p/γ)، سرعت ($V^2/2g$) و ارتفاع نقطه تا یک سطح مقایسه اختیاری (Z) مقدار ثابتی بنام "ارتفاع کل انرژی" است.

برای استفاده از این معادله خط جریان باید شرایط زیر را داشته باشد:

۱- هیچ گونه انتقال حرارت در سیستم وجود نداشته باشد.

۲- کار محوری در سیستم برابر صفر باشد.

۳- دو نقطه‌ای انتخابی برای نوشتن معادله برنولی روی خط جریان باشند.

۴- جریان دائمی و یکنواخت باشد.

۵- جریان بدون اصطکاک است [۲-۳].

معادله تصحیح شده برنولی برای جریان داخل لوله‌ها:

بسیاری از جریان‌های سیالات در حوضه مهندسی شامل جریان‌هایی هستند که توسط یک دیواره جامد تحت تأثیر قرار می‌گیرند و بنابراین شامل یک لایه مرزی هستند. مهمترین حالت این جریان‌ها، جریان داخل لوله‌ها است.

برای بسط دادن معادله برنولی به صورتی که حالات عملی فوق را نیز شامل شود، دو تصحیح لازم است. اولین تغییر (که از اهمیت کمتری برخوردار است)، تصحیح انرژی جنبشی به خاطر تغییر سرعت سیال بر حسب موقعیت نقطه نسبت به دیواره است (بیشترین سرعت در مرکز و کمترین سرعت در مجاور دیواره است). دومین تصحیح (که اهمیت زیادی دارد)، تصحیح رابطه برنولی به علت وجود اصطکاک است [۲-۴].

۱- تصحیح انرژی جنبشی:

در بررسی وضعیت جریان درون کانال‌های باز و بسته، اغلب تحلیل یک بعدی به کار می‌رود. کل جریان به صورت یک لوله بزرگ با سرعت متوسط V در هر مقطع در نظر گرفته می‌شود، اما این انرژی جنبشی در واحد وزن برحسب هد سرعت متوسط سیال $V^2/2g$ برابر مقدار

متوسط $U^2/2g$ روی تمام سطح مقطع نمی شود. بنابراین لازم است که یک ضریب تصحیح α برای جمله $V^2/2g$ چنان محاسبه کنیم
برابر متوسط انرژی جنبشی در واحد وزن سیال گذرنده از هر سطح مقطع باشد:

$$\alpha = \frac{1}{A} \int_A \left(\frac{U}{V} \right)^3 dA \quad \text{معادله (۶)}$$

که در این رابطه V سرعت متوسط سیال، A سطح مقطع جریان می باشد. به طور کلی این ضریب تصحیح برای جریان آرام و آشفته در حدود زیر می باشد.

$$\alpha_{Laminar} = 2$$

$$\alpha_{Turbulent} = 1.01 - 1.10$$

۲- تصحیح رابطه برنولی به خاطر وجود اصطکاک:

اصطکاک اثر خود را به صورت کاهش انرژی مکانیکی در یک سیال نشان می دهد. بر اساس قانون بقای انرژی، مقداری حرارت معادل کاهش انرژی مکانیکی تولید می شود. اصطکاک سیال می تواند به عنوان هر نوع تبدیل انرژی مکانیکی به حرارت در جریان سیال تعریف شود. برای سیالات تراکم ناپذیر، رابطه برنولی با افزودن یک جمله به سمت راست معادله ۳، تصحیح می شود.

$$\frac{P_a}{\rho g} + z_a + \alpha_a \frac{\overline{V_a^2}}{2g} = \frac{P_b}{\rho g} + z_b + \alpha_b \frac{\overline{V_b^2}}{2g} + h_f \quad \text{معادله (۷)}$$

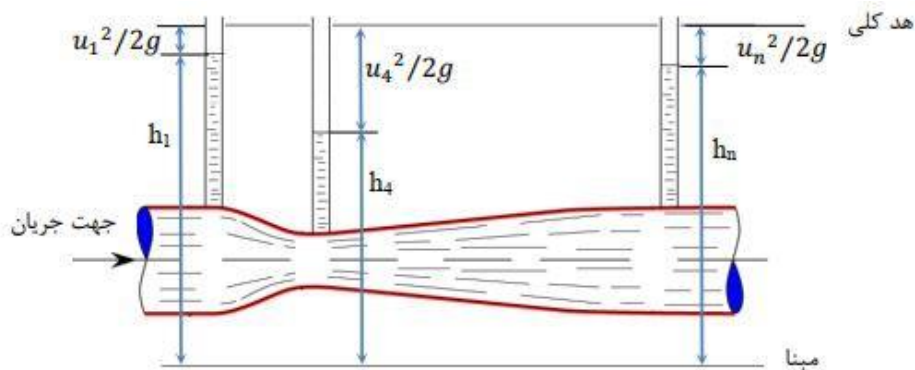
که در این رابطه h_f افت انرژی به ازاء واحد وزن سیال است.

ونتوری لوله ای است که سطح مقطع آن بتدریج کم میشود و بعد از قسمت باریک شده لوله (گلوگاه) دوباره سطح مقطع آن اضافه شده تا به قطر اولیه می رسد. در این آزمایش علاوه بر آشنایی با ونتوری و تغییرات فشار در قسمت های مختلف آن، مدرج کردن یک ونتوری متر به عنوان وسیله ای جهت اندازه گیری دبی در لوله ها نیز انجام می شود.

در شکل (۱) یک جریان ایده آل مایعی در لوله ونتوری نشان داده شده است. اگر a_1, a_f, a_n به ترتیب سطح مقطع لوله ونتوری در مدخل ورودی، گلوگاه و مقطعی اختیاری و همچنین h_1, h_f, h_n ارتفاعات پیزومتری در این مقاطع باشند با صرف نظر کردن از افت انرژی در لوله ونتوری و ثابت فرض کردن سرعت و ارتفاعات پیزومتری در هر مقطع می توان رابطه برنولی و پیوستگی را بین دو مقطع نوشت و با حذف یکی از سرعت ها در دو رابطه فوق رابطه (۶-۱) را نتیجه گرفت و سپس دبی ایده آل جریان را از رابطه (۷-۱) بدست آورد.

$$u_4 = \sqrt{\frac{2g(h_1 - h_4)}{1 - (a_4/a_1)^2}} \quad \text{معادله (۸)}$$

$$Q_4 = a_4 u_4 = a_4 \sqrt{\frac{2g(h_1 - h_4)}{1 - (a_4/a_1)^2}} \quad \text{معادله (۹)}$$



شکل ۲: شرایط ایده‌آل در لوله ونتوری متر.

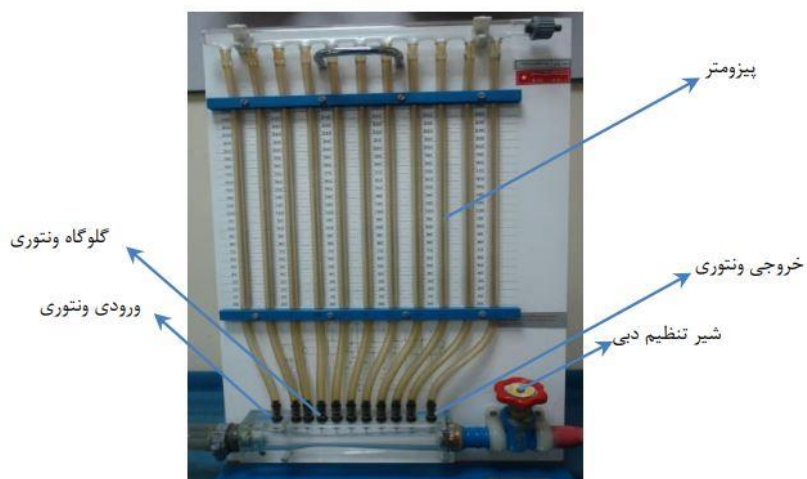
با توجه به افت انرژی بین مقاطع ۱ و ۴ و ثابت نبودن سرعت ها در هر مقطع، مقدار واقعی دبی جریان کمتر از مقدار بدست آمده از رابطه (۱-۷) می باشد. برای برطرف نمودن اثرات فوق ضریبی بنام (ضریب دستگاه) که با C نشان داده میشود به طرف دوم رابطه (۱-۷) اضافه کرده و عملاً بصورت رابطه (۱-۸) مورد استفاده قرار می گیرد.

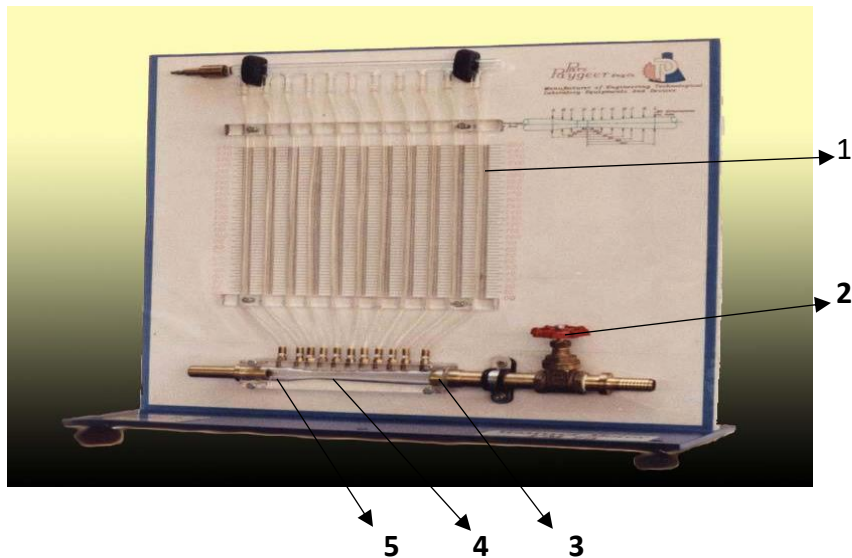
$$Q = C a_4 \sqrt{\frac{2g(h_1 - h_4)}{1 - (a_4/a_1)^2}} = C Q_t \quad \text{معادله (۱۰)}$$

به کمک رابطه برنولی و معادله پیوستگی بین مقاطع ورودی و هر مقطع اختیاری دیگر می توان فشار ایده-آل را در طول لوله ونتوری بصورت رابطه (۱-۹) بدست آورد.

$$\frac{h_n - h_1}{u_4^2/2g} = \left(\frac{a_4}{a_1}\right)^2 - \left(\frac{a_4}{a_n}\right)^2 \quad \text{معادله (۱۱)}$$

شکل دستگاه [۲]





۱- پیزومتر

۲- شیر تنظیم دبی

۳- گلوگاه ونتوری

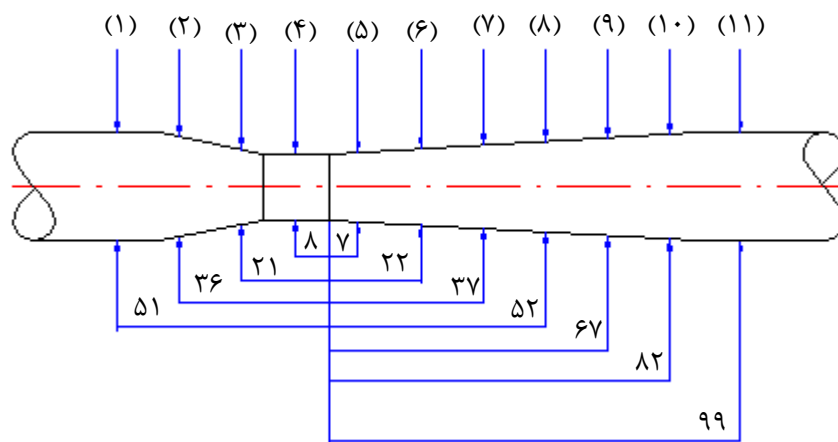
۴- خروجی ونتوری

۵- ورودی ونتوری

شکل ۲: اجزای دستگاه ونتوری

شرح دستگاه [۲]

دستگاه آزمایش برنولی از یک میز هیدرولیکی و تجهیزات آزمایش برنولی که در شکل شماره (۲) نمایش داده شده تشکیل شده است. میز هیدرولیکی دارای مخزن آب، پمپ تغذیه و شیر کنترل جریان می باشد. دستگاه آزمایش (ونتوری متر) شامل یک لوله است که سطح مقطع آن به تدریج کاهش یافته و بعد از قسمت باریک شده آن (گلوگاه) دوباره به سطح مقطع آن اضافه می شود تا به قطر اولیه می رسد. در طول گلوگاه (قسمت همگرا) چند پیزومتر جهت اندازه گیری ارتفاع معادل فشار یا هد سیال در فواصل مختلف و مشخص از گلوگاه نصب شده است. همچنین یک میله (پروپ) جهت اندازه گیری مجموع ارتفاع معادلات فشار و سرعت در جهت جریان قرار می گیرد و پیزومتر مربوط به قرائت بار کلی می باشد. همانگونه که در شکل شماره (۳) نمایش داده شده است. سطح مقطع کانال و لوله ها در شکل شماره (۳) نمایش داده شده اند. با توجه به شکل شماره (۳) ملاحظه می گردد که مقاطع کانال نسبت به مقطع وسط به صورت متقارن قرار گرفته اند. بالای هر مقطع از کانال یک لوله شیشه ای قرار گرفته است که هد استاتیک سیال را در مقاطع مورد نظر نمایش می دهد. در شکل شماره (۳) فاصله مقاطع و قطر هر مقطع موجود در کانال نمایش داده شده است. اندازه سطح مقطع کانال در ۱۱ موقعیت مطابق جدول زیر می باشد. شماره گذاری مقطع به ترتیب از چپ به راست در نظر گرفته شده است.



شماره پیزومتر	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱
قطر مقطع (mm)	۲۶/۰۰	۲۴/۰۰	۱۸/۴	۱۶/۰۰	۱۶/۸	۱۸/۴۷	۲۰/۱۶	۲۱/۸۴	۲۳/۵۳	۲۵/۲۱	۲۶/۰۰

شکل ۳: قطر مقطع مختلفو محل پیزومترها بر حسب میلیمتر

روش انجام آزمایش [۲]

- ۱- شیر تخلیه مخزن خروجی را باز می کنیم.
- ۲- شیر کنترل اصلی را بسته و پمپ را روشن می کنیم.
- ۳- با باز کردن کنترل جریات آب را در مخازن استوانه ای و مجاری آب بر قرار می کنیم. مواظب سر ریز شدن آب از استوانه ها باشید. ممکن است فشار در گلوگاه به اندازه کافی نرسد تا لوله فشار سنج مربوطه را پر کند.
- ۴- بتدریج با بستن شیر تخلیه فشار را بالا می بریم این کار باعث بالا بردن سطوح سیال در لوله ها و مخازن استوانه ای می شود . بنابراین همزمان شیر کنترل جریان را تنظیم می کنیم.
- ۵- با تنظیم همزمان شیر تخلیه و شیر کنترل سعی می کنیم جریان پایداری به وجود آوریم به طوری که در همه لوله های فشار سنج سطح سیال مشهود باشد.
- ۶- ارتفاع ستون سیال را در هر لوله یادداشت می کنیم.
- ۷- ارتفاع ستون سیال در مخازن استوانه ای ورودی و خروجی و همچنین دبی جریان سیال را اندازه گیری و یادداشت می کنیم
- ۸- آزمایش را برای چند دبی جریان مختلف انجام می دهیم.
- ۹- پس از اتمام آزمایش شیر اصلی را بسته و پمپ را خاموش می کنیم.

خواسته های آزمایش

۱. برای پیزومتر a در هر دبی کمیات P_1/ρ ، $V^2/2g$ و در نتیجه ارتفاع نظیر کل را به دست آورید.
۲. با استفاده از تئوری آزمایش و سوال قسمت قبل P_i/ρ ، $V_i^2/2g$ و E_i را برای مقاطع دیگر ونتوری محاسبه کنید.
۳. خط پیزومتریک و انرژی را با کمیات به دست آمده در ۲ سوال قبل در مقاطع (۱) تا (۱۱) به صورت تابعی از فاصله ترسیم کنید.
۴. در طی آزمایش، افت انرژی بین بین مقاطع (۱) تا (۱۱) از چه رابطه‌ای به دست می‌آید؟ در هر دبی ارتفاع نظیر انرژی کل تلف شده را برای پیزومترهای اول و آخر به دست آورید.
۵. ضریب تصحیح انرژی جنبشی را تعریف کنید. برای کدام مقطع از ونتوری (ورودی، گلوگاه و خروجی) در محاسبه مقدار انرژی جنبشی این ضریب باید به کار گرفته شود؟
۶. در صورتی که توزیع سرعت در جریان آشفته درون یک لوله به صورت $V/V_{\max} = (y/r_0)^{1/7}$ بیان شود (y فاصله از دیواره لوله و r_0 شعاع لوله)، ضریب تصحیح انرژی جنبشی چقدر است؟
۷. در صورتی که در طی جریان آب از یک خط لوله، در نقطه A قطر لوله ۱ متر، فشار ۹۸ kpa و سرعت جریان ۱ m/s باشد و در نقطه B که دارای ارتفاع ۲ متر بیشتر از A است، قطر لوله ۰٫۵ متر و فشار ۲۰ kpa باشد، جهت جریان را تعیین کنید.

منابع:

1- Hughes, W. F. Brighton J. A., Winowich, N. (1999). Schaum's Outline of Fluid Dynamics: page 149.

۲- مصلحی، پ. (۱۳۹۱). "دستور کار آزمایشگاه مکانیک سیالات"، تهران: دانشگاه صنعتی شریف.

3- Bansal, R. K. (2005). A Textbook of Fluid Mechanics: page 248.

4- Goel, V. K. (2007). Fundamentals of Physics Xi. (Introduction): page 31.